有限Abel群上的Fourier分析

Guanyu Li

1 特征

定义. 若$Abel$群G上的复值函数$\chi : G \to \mathbb{C}$满足

$$\chi(gh) = \chi(g)\chi(h),\ \forall g, h \in G$$

即χ是群$G \to \mathbb{C}^*$的同态，则称χ是群G的**特征**(character).若对于任意G中的元素g，$\chi(g) = 1$则称χ是**平凡特征**(trivial character)或**单位特征**(unit character).

注意到对于任意Abel群G的特征χ和任意群的元素g，$|\chi(g)| = 1$.这因为G是有限群，因而对于任意元素g，$g^{|G|} = 1$，故$\chi(g)^{|G|} = 1$，即$\chi(g)$是单位根，故$|\chi(g)| = 1$.于是，$\chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$.

若G是Abel群，记$\hat{G}$为G的所有特征，并赋予乘法

$$\chi_1 \cdot \chi_2(g) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g),$$

称$\hat{G}$为G的**对偶群**(*dual group*).

命题1.1. *设H是有限Abel群G的子群.任意H的特征可以扩张为G的特征.*

Proof. 对H在G中的指数$(G : H)$做归纳法.若$(G : H) = 1$，则已经完成证明.否则，存在$g \in G$使得$g \notin H$.设n是满足$g^n \in H$的最小自然数， □

2 正交关系

设V是有限Abel群G上所有的复值函数组成的集合，它自然是一个$\mathbb{C}$向量空间.容易验证

$$\pi_g(x) := \begin{cases} 1 & x = g \\ 0 & x \neq g \end{cases}$$

是V的一组基，于是$\dim V = |G|$.在V上可以定义一个Hermite内积

$$(f,g) := \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)\overline{g(x)}$$

其中，这里的求和是对G中所有的元素进行的.我们研究特征一方面因为它有良好的代数性质，另一方面因为所有的特征组成了V的一组基.

引理2.1. 若$\chi : G \to \mathbb{C}$是Abel群G上的非平凡特征，那么

$$\sum_{x\in G} \chi(x) = 0.$$

Proof. 由于χ是非平凡特征，于是存在$g \in G$使得$\chi(g) \neq 1$，故我们有

$$\chi(g)\sum_{x\in G}\chi(x) = \sum_{x\in G}\chi(g)\chi(x) = \sum_{x\in G}\chi(gx) = \sum_{x\in G}\chi(x),$$

最后一个等式因为左乘变换后gx也取遍G中所有元素.于是命题得证. □

定理2.1. 有限Abel群G上的所有特征组成V的正交子集.

Proof. 为此，我们需要验证两件事情，首先$|\chi(g)| = 1$，于是

$$(\chi,\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2 = 1.$$

另一方面，若χ_1, χ_2是不同的特征，那么

$$(\chi_1,\chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\chi_2(g)^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\chi_1\cdot\chi_2^{-1})(g).$$

显然$\chi_1\cdot\chi_2^{-1}$是$\hat{G}$中的元素，故$\chi_1\cdot\chi_2^{-1}$是特征.但$\chi_1 \neq \chi_2$，因而$\chi_1\cdot\chi_2^{-1}$非平凡.根据引理，最后一个求和为0，得证. □

下面的定理是本小节的主要结果，也是建立有限Abel群上Fourier分析的核心：

定理2.2. 有限Abel群G上的所有特征组成V的正交基.

Proof. 由前面的定理，只需证明所有特征张成V即可. □

3 Fourier系数及逆变换公式

现在，我们类比Fourier分析的方法，建立下面一系列结果.给定Abel群G和上面的复值函数f，设χ是G的特征.定义f关于χ的**Fourier系数**(*Fourier coefficient*)为

$$\hat{f}(\chi) := (f, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\overline{\chi(x)},$$

且f的**Fourier级数**(*Fourier series*)为

$$f \sim \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi.$$

但是，由之前的讨论G的特征组成V的一组基，于是存在唯一的线性组合

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} c_\chi \chi,$$

其中c_χ是某些复数.根据特征的正交关系，我们有

$$\hat{f}(\chi) := (f, \chi) = c_\chi,$$

于是

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi,$$

这便是有限Abel群的Fourier展开式.此外，我们还有

定理3.1 (Parseval-Plancherel公式)**.** *设f是有限Abel群G上的复值函数，那么$||f||^2 = \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2$.*

Proof. 由于G的特征组成V的一组正交基，且$\hat{f}(\chi) = (f, \chi)$，于是

$$\|f\|^2 = (f, f) = \sum_{\chi \in \hat{G}} (f, \chi)\overline{\hat{f}(\chi)} = \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2.$$

□